

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI



*Numeri Normali, Indipendenza Statistica e
Sistemi Moltiplicativi Ortogonali nelle Basi
di Numerazione Non Uniformi.*

Relatore:
Chiar.mo Prof. GERALD S. GOODMAN

Tesi di Laurea di:
MARIO CORSOLINI

Correlatore:
Chiar.mo Prof. SANJOY K. MITTER
(Scuola Normale Superiore, Pisa)

I Revisione [2016]

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "ULISSE DINI"
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA — ANNO ACCADEMICO 1994-95

Indici

Indice dei contenuti

	Pagina
Indici	3
Indice dei contenuti	3
Indice delle figure	5
Indice delle formule	6
1 Introduzione	9
2 Basi di numerazione non uniformi	13
2.1 Definizione: intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici e base di numerazione $b_{\bar{m}}$. . .	13
2.2 Definizione: mappa $b_{\bar{m}}$ -adica.	15
2.3 Esempio: base non uniforme $\mathfrak{Z}_{(0.35,0.1,0.55)}$	15
3 Funzioni di Rademacher	19
3.1 Definizione: sistema fondamentale.	19
3.2 Proposizione: il sistema (3.1.a) ha almeno una soluzione. . .	19

3.3	Lemma: se le componenti del vettore \vec{z} sono non nulle allora sono tutte distinte.	20
3.4	Lemma: le componenti del vettore \vec{z} sono non nulle.	21
3.5	Definizione: funzioni di Rademacher generalizzate in base $b_{\vec{m}}$	22
3.6	Osservazione: definizione alternativa delle funzioni di Rademacher generalizzate.	22
3.7	Osservazione: media nulla delle funzioni di Rademacher.	23
3.8	Esempio: funzioni di Rademacher in base $\mathfrak{Z}_{(0.35,0.1,0.55)}$	23
4	Funzioni di Walsh	27
4.1	Definizione: funzioni di Walsh generalizzate in base $b_{\vec{m}}$	27
4.2	Lemma: le funzioni di Walsh hanno media nulla.	28
4.3	Proposizione: le funzioni di Walsh sono complete sugli intervalli $b_{\vec{m}}$ -adici di ordine q	29
4.4	Corollario: negli sviluppi in serie di Fourier-Walsh si ha che $\sigma_0 = \rho_0$	32
4.5	Esempio: non ortogonalità delle funzioni di Walsh in base $\mathfrak{Z}_{(0.35,0.1,0.55)}$	33
4.6	Lemma: le funzioni di Walsh in progressione geometrica di ragione b sono ortogonali.	34
4.7	Lemma: le funzioni di Walsh in progressione geometrica di ragione b sono equilimitate.	35
4.8	Definizione: $R_n(x)$	35
4.9	Lemma: $R_n(x)/n$ converge a 0 per quasi ogni x in Ω	35
5	Teorema dei numeri normali	39
5.1	Osservazione: interpretazione dinamica del teorema dei numeri normali.	39
5.2	Teorema: quasi ogni numero reale è normale in ciascuna base $b_{\vec{m}}$ prefissata.	40
5.3	Osservazione: normalità rispetto a tutte le basi $b_{\vec{m}}$	41
5.4	Corollario: quasi ogni numero reale è normale negli insiemi numerabili prefissati di basi non uniformi.	41

6	Indipendenza statistica e moltiplicatività	43
6.1	Osservazione: moltiplicatività delle $r_j(x)$	43
6.2	Lemma: l'indipendenza statistica delle $r_j(x)$ ne implica la proprietà di moltiplicatività.	44
6.3	Definizione: identità di Rényi.	44
6.4	Proposizione: l'identità di Rényi si può estendere a qualunque base non uniforme $b_{\vec{m}}$	45
6.5	Lemma: la proprietà di moltiplicatività delle $r_j(x)$ ne implica l'indipendenza statistica.	46
6.6	Teorema: la moltiplicatività delle $r_j(x)$ equivale all'indipen- denza statistica delle $b_j(x)$	48
Bibliografia		51

Indice delle figure

	Pagina	
2.3.I	Intervalli $\mathfrak{3}_{(0.35,0.1,0.55)}$ -adici di ordine 0, 1 e 2.	16
2.3.II	A sinistra $b_1(x)$, a destra $b_2(x)$, in base $\mathfrak{3}_{(0.35,0.1,0.55)}$	17
2.3.III	A sinistra $f(x)$ e $f^{-1}(x)$, a destra $T(x)$, in base $\mathfrak{3}_{(0.35,0.1,0.55)}$	17
3.8.I	In alto $r_1(x)$ ovvero $w_1(x)$, in basso $r_1^2(x)$ ovvero $w_2(x)$, in base $\mathfrak{3}_{(0.35,0.1,0.55)}$	25
6.6.I	Proprietà delle funzioni $r_j(x)$ e $b_j(x)$	49

Indice delle formule

	Pagina
2.1.a	Sviluppo $b_{\bar{m}}$ -adico di x 14
2.2.a	Mappa $b_{\bar{m}}$ -adica 15
3.1.a	Sistema fondamentale 19
3.3.a	Forma matriciale (quadrata) del sistema fondamentale 20
3.3.b	Primo sistema ridotto (colonne distinte) 21
3.4.a	Secondo sistema ridotto ($z_i \neq 0$) 22
3.5.a	Funzioni di Rademacher generalizzate 22
3.6.a	Definizione alternativa delle funzioni di Rademacher generalizzate 22
3.7.a	Media nulla delle funzioni di Rademacher 23
3.8.a	Soluzione generale del sistema fondamentale nel caso $b = 3$. . . 23
4.1.a	Funzioni di Walsh generalizzate 27
4.2.a	Valore medio delle funzioni di Walsh 28
4.2.b	Espressione in base b di un numero naturale l 28
4.2.c	Ordinamento lessicografico degli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici di ordine s . 28
4.3.a	Sviluppo di $w_{i-1}(x)$ come prodotto di funzioni di Rademacher . 30
4.3.b	Formula esplicita per l'elemento generico della matrice W . . . 30
4.3.c	Matrice di Vandermonde costruita sul vettore \vec{z} 31
4.3.d	Coordinate controvarianti 31
4.3.e	Relazione tra coordinate covarianti e controvarianti 32
4.4.a	Coordinate covarianti rispetto alle funzioni di Walsh 32
4.4.b	Coordinate controvarianti rispetto alle funzioni di Walsh 33
4.6.a	Successioni geometriche di ragione b delle funzioni di Walsh . . 34
4.6.b	Prodotto scalare hermitiano tra funzioni di Walsh 34

4.8.a	Definizione di $R_n(x)$	35
4.9.a	Convergenza quasi ovunque a 0 di $R_n(x)/n$	36
4.9.b	Maggiorazione di $R_{k^2}(x)/k^2$	36
4.9.c	Convergenza quasi ovunque a 0 di $R_{k^2}(x)/k^2$	37
5.1.a	Interpretazione dinamica del teorema dei numeri normali	39
6.1.a	Moltiplicatività delle funzioni di Rademacher	43
6.4.a	Identità di Rényi generalizzata	45
6.4.b	Sistema di Rényi	45

Capitolo 1

Introduzione

Per costruire un modello matematico del lancio di un “dado” a b facce, prendendo spunto dal modello classico di Borel [3], si possono identificare le cifre dello sviluppo in base b di un punto $x \in [0, 1)$ con i b possibili esiti di ogni lancio: la j -esima cifra dello sviluppo di x corrisponde, una volta etichettate le facce del dado, al numero ottenuto al j -esimo lancio. Se le facce del dado sono tutte equiprobabili si può dotare l'insieme $[0, 1)$ della misura uniforme di Lebesgue ottenendo un ottimo modello matematico per una sequenza infinita di lanci, ovviamente trascurando l'insieme (di misura nulla) dei razionali a doppia definizione b -adica. Il teorema dei numeri normali di Borel assicura in questo caso che, scelta una qualunque stringa di m cifre da 0 a $b - 1$, tale stringa compare nello sviluppo b -adico di quasi ogni $x \in [0, 1)$ con frequenza asintoticamente uguale a b^{-m} . Questo, riletto in termini “pratici”, equivale a dire che, con probabilità 1, lanciando il dado infinite volte, ogni m -upla di esiti prefissati comparirà con frequenza b^{-m} , come già il buon senso lascerebbe intuire.

Se invece il dado fosse truccato si potrebbe ricorrere, come quasi sempre viene fatto nella letteratura esistente sull'argomento, a una misura non uniforme che tenga conto delle diverse probabilità relative di ogni possibile esito del lancio. Tuttavia in questo scritto si illustrerà un diverso approccio al problema, e cioè si manterrà su $[0, 1)$ la misura uniforme di Lebesgue, mentre si adopereranno basi di numerazioni non uniformi per modellizzare le

differenti probabilità associate a ogni esito del lancio del dado truccato, analogamente a quanto è stato fatto, nel caso del lancio di una moneta truccata, da Corsolini [4] in collaborazione con Morawiec [12].

Per dimostrare il teorema dei numeri normali in basi di numerazione non uniformi si farà ricorso a una idea dimostrativa di Kac [8], originariamente utilizzata per affermare che quasi ogni numero reale è semplicemente normale in base 2, basata sull'uso delle funzioni di Rademacher. Un numero si dice semplicemente normale in base b quando le *singole* cifre da 0 a $b-1$ compaiono nel suo sviluppo b -adico con frequenza asintoticamente uguale a b^{-1} ; in effetti un numero è normale in una base b se le stringhe di cifre b -adiche sono equiprobabili nel suo sviluppo b -adico, ovvero (come mostrato da Pillai [13]) se è semplicemente normale in ogni base che sia una potenza intera positiva di b .

Sostituendo le funzioni di Rademacher con quelle di Walsh, che si costruiscono a partire dalle prime facendone tutti i possibili prodotti finiti, Kac stesso nella già ricordata memoria [8], e successivamente Mendès France [11], indicarono come si potesse giungere alla normalità “forte” di quasi ogni numero reale in base 2. Tuttavia il metodo seguito da Mendès France, che può essere generalizzato anche a basi $b > 2$, era diverso da quello di Kac, la cui idea è stata invece ripresa da Goodman [7] che ha illustrato come si possa stabilire la normalità di quasi ogni numero reale in base b arbitraria, facendo uso delle funzioni di Walsh generalizzate in base b , seguendo lo stesso semplice ragionamento di Kac.

Le dimostrazioni di Kac e Goodman sfruttano il fatto che sia le funzioni di Rademacher che quelle di Walsh sono ortonormali se riferite a una base di numerazione uniforme. Ciò non è più valido nel passaggio a basi di numerazione non uniformi ma, approfondendo l'analisi del metodo dimostrativo adottato, ci si accorge che si può fare anche a meno dell'ortonormalità delle funzioni di Walsh, riuscendo ugualmente nell'intento di provare il teorema di Borel anche per questo tipo di basi.

Nel capitolo 2 verranno quindi introdotte le basi di numerazioni non uniformi $b_{\bar{m}}$, si daranno le definizioni principali e verranno ricordati alcuni utili risultati classici. Per maggior chiarezza si farà anche riferimento a un esem-

pio grafico-numerico, per visualizzare alcune delle funzioni e degli insiemi coinvolti nella definizione delle basi non uniformi. Al fine di evitare possibili confusioni è opportuno sin da ora ricordare che ogni qual volta, nel corso della trattazione, verrà espresso un numero in cifre, queste sono da intendersi sempre decimali (uniformi) a meno che il numero stesso non sia esplicitamente racchiuso tra parentesi tonde con in pedice l'indicazione della base utilizzata.

Nel capitolo 3 si dimostreranno gli strumenti necessari per costruire una generalizzazione delle funzioni di Rademacher in base $b_{\bar{m}}$ in maniera tale che rimangano valide le utili proprietà possedute dalle funzioni di Rademacher classiche in base b , come l'ortonormalità e la proprietà di moltiplicatività (che verrà discussa più diffusamente nel capitolo 6). A tal proposito si ringrazia il Prof. Francesco Gherardelli e il Prof. Graziano Gentili dell'Istituto Matematico "Ulisse Dini" per l'aiuto apportato nella chiarificazione di alcuni elementi di geometria algebrica utilizzati nella stesura di questo capitolo.

Il capitolo 4 è dedicato interamente alla generalizzazione in base $b_{\bar{m}}$ delle funzioni di Walsh, e allo studio delle proprietà che di queste si possono trasportare dal caso delle basi uniformi. Risulterà, come anticipato, che in base $b_{\bar{m}}$ le funzioni di Walsh **non** sono ortogonali, tuttavia sarà ugualmente possibile utilizzarle proficuamente al fine di dimostrare il teorema dei numeri normali seguendo l'idea originaria di Kac, giungendo anzi a chiarire ciò che in tale dimostrazione è veramente essenziale e ciò che non lo è. Si daranno quindi i particolari di come si possano provare:

1. la completezza delle funzioni di Walsh generalizzate nello spazio hilbertiano delle funzioni semplici, ovvero costanti a tratti, sugli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici;
2. l'equilimitatezza e ortogonalità delle successioni in progressione geometrica di ragione b di funzioni di Walsh;
3. la convergenza quasi ovunque a zero del valore assoluto della media aritmetica delle sopracitate successioni.

Con le tre precedenti proprietà si dimostrerà nel capitolo 5 il teorema dei numeri normali per le basi non uniformi nella forma più generale possibile,

ovvero affermando che quasi ogni numero reale è contemporaneamente normale in ogni base appartenente a un qualsiasi insieme numerabile prefissato di basi di numerazione non uniformi $b_{\bar{m}}$.

Il capitolo 6 sarà infine dedicato a un più attento studio della relazione che intercorre tra la proprietà di moltiplicatività delle funzioni di Rademacher generalizzate e l'indipendenza statistica dei coefficienti $b_{\bar{m}}$ -adici, ovvero le funzioni che associano a ogni $x \in [0, 1)$ il valore della j -esima cifra dello sviluppo $b_{\bar{m}}$ -adico di x . Per fare questo si farà uso di una generalizzazione in base $b_{\bar{m}}$ di una identità di Rényi [15], già estesa alle basi uniformi b con $b \geq 3$ da Goodman [7]. La conclusione che si trarrà è che le due nozioni sono equivalenti; poiché la proprietà di moltiplicatività può essere stabilita attraverso l'analisi elementare, mediante il calcolo diretto di un integrale, ciò costituisce una nuova prova dell'indipendenza dei coefficienti $b_{\bar{m}}$ -adici e, contemporaneamente, delle funzioni di Rademacher generalizzate.

Capitolo 2

Basi di numerazione non uniformi

2.1 Definizione. Intervalli $b_{\vec{m}}$ -adici e base di numerazione $b_{\vec{m}}$.

Scelto un qualunque $b \geq 2$, con $b \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, si costruisca un vettore \vec{m} di b componenti $(m_0, m_1, \dots, m_{b-1})$ tutte strettamente positive¹ e tali che la loro somma sia 1; si divida l'intervallo² $\Omega = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ in b sottointervalli Ω_i , ciascuno di ampiezza m_i , $0 \leq i \leq b-1$, chiusi a sinistra e aperti a destra; ciò equivale, avendo definito

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_i = \sum_{k=0}^{i-1} m_k, \quad 1 \leq i \leq b, \end{cases}$$

a porre $\Omega_i = [\alpha_i, \alpha_{i+1})$. Adesso si divida ogni intervallo Ω_i in b parti Ω_{ij} in modo che le divisioni risultino omotetiche a quelle effettuate originariamente su Ω (l'ampiezza dell'intervallo Ω_{ij} sarà pertanto $m_i m_j$) e si iteri questo procedimento all'infinito, sempre operando divisioni proporzionali alle componenti del vettore \vec{m} .

¹: ciò è stato imposto solo per semplicità; infatti, adoperando le definizioni di questo paragrafo, al fine di dimostrare il teorema dei numeri normali se, per esempio, l'intervallo Ω_i fosse degenerare, ci si potrebbe ricondurre, a meno di un insieme di misura nulla (eliminando cioè da Ω tutti i numeri il cui sviluppo $b_{\vec{m}}$ -adico contenga la cifra \hat{i}), alla base di numerazione $(b-1)_{\vec{m}}$ costruita sui soli intervalli Ω_i di misura strettamente positiva (dove \vec{m} è ottenuto dal vettore \vec{m} eliminando la componente nulla \hat{i} -esima).

²: $[0, 1)$ è stato scelto per ulteriore semplicità. Tutte le considerazioni che verranno fatte possono essere banalmente adattate a qualunque altro intervallo $[a, b) \subset \mathbb{R}$.

Tramite la famiglia di sottointervalli di Ω sopra definita si costruisca la base di numerazione non uniforme, che indicheremo come base $b_{\bar{m}}$: i sottointervalli Ω_i saranno gli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici di ordine 1, gli Ω_{ij} quelli di ordine 2, gli Ω_{ijk} quelli di ordine 3 e così via (dunque, analogamente al caso uniforme, $\forall q \in \mathbb{N}$ esistono b^q intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici di ordine q).

Questo significa che, preso un $x \in \Omega$, le prime q cifre del suo sviluppo $b_{\bar{m}}$ -adico saranno gli indici dell'intervallo $b_{\bar{m}}$ -adico di ordine q al quale x appartiene e, viceversa, tutti gli x appartenenti a un intervallo $b_{\bar{m}}$ -adico di ordine q hanno le prime q cifre del loro sviluppo $b_{\bar{m}}$ -adico uguali agli indici dell'intervallo al quale appartengono, ovvero:

$$x = (0, i_1 i_2 \cdots i_q \cdots)_{b_{\bar{m}}} \Leftrightarrow x \in \Omega_{i_1 i_2 \cdots i_q}.$$

Si considerino inoltre le cifre dello sviluppo $b_{\bar{m}}$ -adico come funzioni della variabile x , ovvero si definiscano $\forall j \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ i coefficienti $b_{\bar{m}}$ -adici $b_j(x) : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, b-1\}$ in modo tale che $\forall x \in \Omega$ si abbia $x = (0, b_1(x) b_2(x) b_3(x) \cdots)_{b_{\bar{m}}}$ con la convenzione (necessaria per evitare doppie definizioni) di scartare gli sviluppi $b_{\bar{m}}$ -adici terminanti con una sequenza infinita di cifre uguali a $b-1$. Si potrà rappresentare x in funzione dei coefficienti $b_{\bar{m}}$ -adici secondo la formula:

$$(2.1.a) \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{i-1} m_{b_k(x)} \right) \alpha_{b_i(x)}.$$

Nel caso delle basi uniformi, per le quali $m_i = b^{-1}$, $0 \leq i \leq b-1$, la (2.1.a) si riduce alla nota formula:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i(x)}{b^i}.$$

La rappresentazione dei numeri reali in base non uniforme (2.1.a) si può anche scrivere in forma di “ f -expansion” ovvero, $\forall x \in \Omega$,

$$x = f_{b_{\bar{m}}}(b_1(x) + f_{b_{\bar{m}}}(b_2(x) + f_{b_{\bar{m}}}(b_3(x) + \cdots))),$$

dove $f_{b_{\bar{m}}}(x)$ è la *spline* lineare passante per i punti (i, α_i) , $0 \leq i \leq b$ (si veda la figura 2.3.III a pagina 17 per un esempio in una base non uniforme

ternaria). In questa forma si potrà applicare il teorema di Everett [6] che assicura la validità delle rappresentazioni non uniformi $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.2 Definizione. Mappa $b_{\bar{m}}$ -adica.

Come nel caso delle basi uniformi è utile definire la mappa b -adica su Ω (o spostamento b -adico) $T_b(x) = bx \pmod{1}$, che proietta gli intervalli b -adici del primo ordine su tutto Ω , similmente verrà definita la mappa $b_{\bar{m}}$ -adica (o spostamento $b_{\bar{m}}$ -adico). Questa sarà espressa, sfruttando la definizione della funzione $f_{b_{\bar{m}}}(x)$ fornita nel paragrafo precedente, come:

$$T_{b_{\bar{m}}}(x) = f_{b_{\bar{m}}}^{-1}(x) \pmod{1},$$

ovvero, rammentando il fatto che applicare $T_{b_{\bar{m}}}(x)$ a un numero x espresso in base $b_{\bar{m}}$ equivale a “cancellare” la prima cifra dello sviluppo $b_{\bar{m}}$ -adico di x ,

$$(2.2.a) \quad T_{b_{\bar{m}}}(x) = T_{b_{\bar{m}}}\left((0, b_1(x)b_2(x)b_3(x)\cdots)_{b_{\bar{m}}}\right) = (0, b_2(x)b_3(x)\cdots)_{b_{\bar{m}}}.$$

Analogamente a quanto avviene per le basi uniformi anche la mappa $b_{\bar{m}}$ -adica, per definizione, conserva le misure in Ω , ovvero $\forall E \subset \Omega$, E misurabile, si ha (indicando con $m(E)$ la misura di E secondo Lebesgue):

$$m(E) = m(T_{b_{\bar{m}}}^{-1}(E))$$

e in più, ancora in analogia con il caso uniforme, $T_{b_{\bar{m}}}(x)$ risulta ergodica in Ω , come mostrato da Rényi [14] adoperando dei risultati di Dunford e Miller [5], Riesz [16] e Knopp [10].

2.3 Esempio grafico-numeric. Base non uniforme $\mathfrak{Z}_{(0.35,0.1,0.55)}$.

Nel seguito, per meglio visualizzare i risultati ottenuti, verranno proposti grafici e esempi numerici relativi a una determinata base non uniforme; per semplicità nei conti è stata scelta una base ternaria (le basi binarie non uniformi, seppur più semplici ancora, non sono adatte allo scopo poiché sono prive di alcune interessanti proprietà che caratterizzano tutte le altre basi non uniformi $b_{\bar{m}}$ con $b \geq 3$: per esempio le funzioni di Rademacher generalizzate

in base $2_{\bar{m}}$ — definite nel prossimo capitolo — non sono a valori complessi ma reali).

Negli esempi ci si riferirà dunque alla base $3_{(0.35,0.1,0.55)}$. Nella figura 2.3.I sono mostrati gli intervalli $3_{(0.35,0.1,0.55)}$ -adici di ordine 0 (Ω stesso), 1 e 2. Sempre rispetto alla stessa base si mostreranno, nelle figure successive, i grafici delle funzioni: $b_1(x)$, $b_2(x)$, $f_{b_{\bar{m}}}(x)$, $f_{b_{\bar{m}}}^{-1}(x)$ e $T_{b_{\bar{m}}}(x)$.

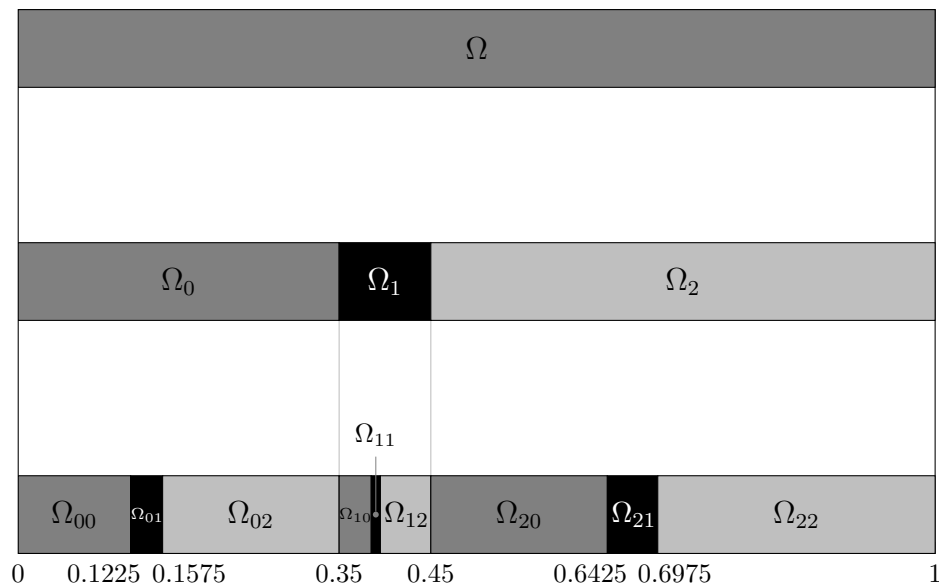


Figura 2.3.I: Intervalli $3_{(0.35,0.1,0.55)}$ -adici di ordine 0, 1 e 2.

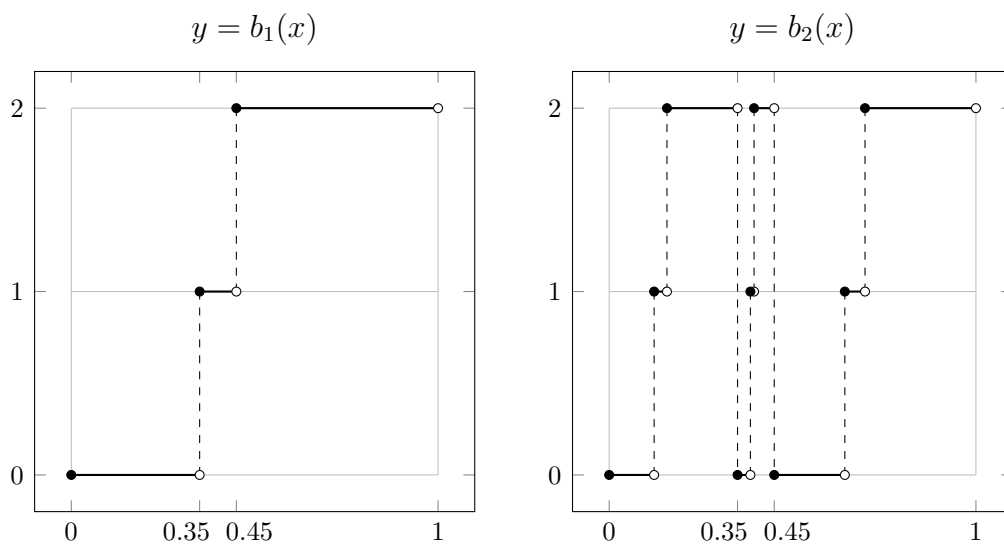


Figura 2.3.II: A sinistra $b_1(x)$, a destra $b_2(x)$, in base $3_{(0.35,0.1,0.55)}$.

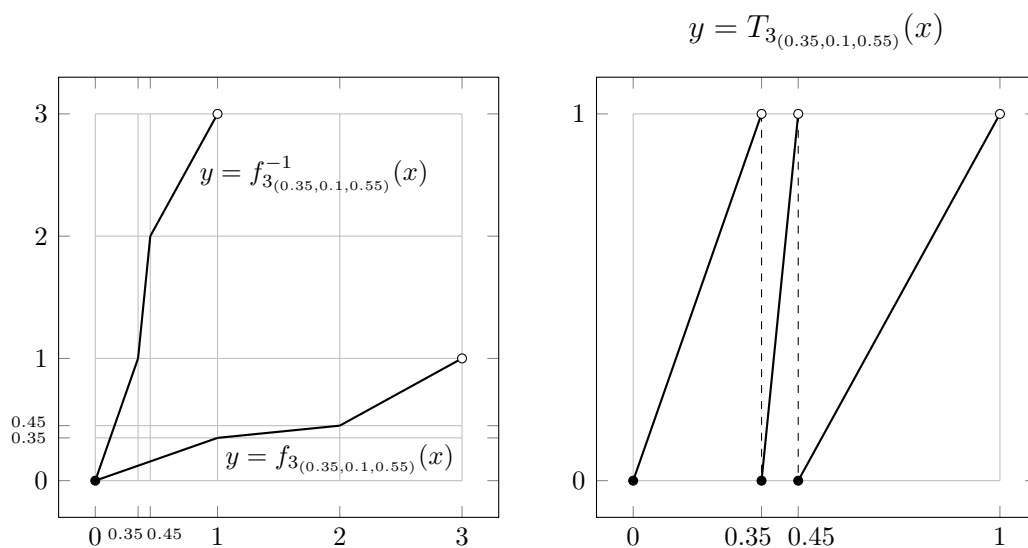


Figura 2.3.III: A sinistra $f(x)$ e $f^{-1}(x)$, a destra $T(x)$, in base $3_{(0.35,0.1,0.55)}$.

Capitolo 3

Funzioni di Rademacher

3.1 Definizione. Sistema fondamentale.

Sia dato il seguente sistema di b equazioni algebriche a coefficienti reali m_i e b variabili complesse z_i , con $0 \leq i \leq b - 1$:

$$(3.1.a) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{b-1} m_i z_i^s = 0, & 1 \leq s \leq b - 1 \\ \sum_{i=0}^{b-1} m_i |z_i|^2 = 1. \end{cases}$$

3.2 Proposizione. *Il sistema fondamentale (3.1.a) ha almeno una soluzione.*

Dimostrazione. Si considerino, inizialmente, le sole $b - 1$ equazioni rappresentate dalla prima riga del sistema (3.1.a): le eventuali soluzioni possono essere interpretate come l'insieme dei punti di intersezione di $b - 1$ ipersuperfici polinomiali nello spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}\mathbb{P}^{b-1}$, per cui è assicurata l'esistenza di almeno un punto di intersezione completa (anzi, per il teorema di Bézout [2], essendo tutte le $b - 1$ equazioni indipendenti tra di loro, ne esistono $(b - 1)!$), ovvero una soluzione $\vec{\zeta} = (\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{b-1})$; si noti inoltre che, poiché detta soluzione individua un punto di $\mathbb{C}\mathbb{P}^{b-1}$, essa ha almeno una

componente non nulla; è dunque ben definito il vettore:

$$\vec{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{b-1}) = \frac{\vec{\zeta}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{b-1} m_i |\zeta_i|^2}}$$

le componenti del quale, per costruzione, soddisfano tutte le equazioni del sistema fondamentale (3.1.a) associato alla base $b_{\vec{m}}$. \square

3.3 Lemma. *Se le componenti del vettore \vec{z} sono non nulle allora sono tutte distinte.*

Dimostrazione. Si supponga che tutte le componenti di \vec{z} siano diverse da zero e si scrivano in forma matriciale le $b - 1$ equazioni della prima riga del sistema (3.1.a), precedute dalla condizione nota a priori (per la definizione 2.1 a pagina 13) che la somma degli m_i è 1:

$$(3.3.a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_{b-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_0^{b-1} & z_1^{b-1} & \cdots & z_{b-1}^{b-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{b-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se gli z_i fossero tutti distinti il lemma sarebbe già dimostrato.

Se invece, per assurdo, ciò non fosse vero, si eliminino le colonne duplicate, in modo che rimanga una sola rappresentante per ogni famiglia di colonne uguali. Ovviamente anche il vettore \vec{m} andrà conseguentemente accorciato, sommando tra di loro gli m_i relativi alle colonne eliminate (ciò equivale in effetti a mettere in evidenza i termini relativi agli z_i uguali)¹. Si otterrà così l'uguaglianza vettoriale

$$(3.3.b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_{i_0} & z_{i_1} & \cdots & z_{i_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{i_0}^{b-1} & z_{i_1}^{b-1} & \cdots & z_{i_p}^{b-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m'_{i_0} \\ m'_{i_1} \\ \vdots \\ m'_{i_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

¹: per esempio, se con $b = 7$ si avesse $z_1 = z_3 = z_6$ e $z_2 = z_5$, si eliminerebbero le colonne relative a z_3, z_6 e z_5 ; il nuovo vettore \vec{m}' sarà quindi $(m_0, m_1 + m_3 + m_6, m_2 + m_5, m_4)$.

che non può sussistere. Infatti la matrice rettangolare che compare al primo membro ha rango $p + 1$, poiché il minore costituito dalle prime $p + 1$ righe è una matrice di Vandermonde a colonne tutte distinte (per costruzione) e dunque ha determinante non nullo; se si aggiunge a tale matrice la colonna che compare a secondo membro e si considerano le prime $p + 2$ righe (che esistono in quanto $p < b - 1$, da cui $p + 2 \leq b$) si ha ancora una matrice di Vandermonde a colonne tutte distinte (per costruzione e per l'ipotesi $z_i \neq 0$) e dunque il rango della matrice allargata aumenta di 1; quindi il vettore a secondo membro non appartiene allo spazio generato dalla matrice a primo membro e dunque la relazione (3.3.b) è assurda. Da ciò si deduce che gli z_i sono tutti distinti. \square

3.4 Lemma. *Le componenti del vettore \vec{z} sono non nulle.*

Dimostrazione. Si supponga che, per qualche i , $0 \leq i \leq b - 1$, si abbia $z_i = 0$ e, come nel paragrafo precedente, si scrivano le $b - 1$ equazioni della prima riga del sistema (3.1.a) nella forma usata nell'equazione (3.3.a), ricordandosi di non trascrivere i termini nulli; in questa maniera verranno eliminate le colonne contenenti gli zeri. Indicando con M la somma degli m_i utilizzati (e cioè quelli relativi agli $z_i \neq 0$), e aggiungendo la somma di questi a mo' di prima riga, il risultato sarà:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_{i_0} & z_{i_1} & \cdots & z_{i_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{i_0}^{b-1} & z_{i_1}^{b-1} & \cdots & z_{i_p}^{b-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{i_0} \\ m_{i_1} \\ \vdots \\ m_{i_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dividendo per M (è lecito, poiché esiste almeno uno $z_i \neq 0$, da cui consegue $M > 0$), e definendo $\hat{m}_{i_j} = \frac{m_{i_j}}{M}$, si trova infine:

$$(3.4.a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_{i_0} & z_{i_1} & \cdots & z_{i_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{i_0}^{b-1} & z_{i_1}^{b-1} & \cdots & z_{i_p}^{b-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{m}_{i_0} \\ \hat{m}_{i_1} \\ \vdots \\ \hat{m}_{i_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $p < b - 1$ (ovvero $p + 2 \leq b$). La relazione (3.4.a) può essere interpretata come soluzione di un sistema del tipo (3.1.a) relativo alla base non uniforme costruita sulla divisione generata da $(\hat{m}_{i_0}, \hat{m}_{i_1}, \dots, \hat{m}_{i_p})$. Poiché se $0 \leq j \leq p$ si ha che $z_{i_j} \neq 0$, si può asserire, in virtù del lemma 3.3, che le colonne della matrice al primo membro della (3.4.a) sono tutte distinte. Ma allora, con lo stesso ragionamento adoperato per dimostrare il lemma 3.3, si potrà far vedere che il vettore al secondo membro non può appartenere allo spazio generato dalla matrice al primo membro, e dunque la relazione (3.4.a) non può sussistere. È quindi assurda l'ipotesi che esista almeno uno $z_i = 0$. \square

3.5 Definizione. Funzioni di Rademacher generalizzate in base $b_{\bar{m}}$.

Con gli z_i soluzione del sistema (3.1.a) si costruisca la seguente famiglia di funzioni definite in Ω :

$$(3.5.a) \quad r_j(x) = \sum_{i=0}^{b-1} z_i \chi_{\{b_j(x)=i\}}(x), \quad \forall j \in \mathbb{N}^+,$$

dove il simbolo $\chi_E(x)$ rappresenta la funzione indicatrice (o caratteristica) dell'insieme generico E .

3.6 Osservazione. Definizione alternativa delle funzioni di Rademacher generalizzate.

Ricordando la definizione (2.2.a) a pagina 15 di $T_{b_{\bar{m}}}(x)$ e quella degli intervalli Ω_i , le funzioni di Rademacher generalizzate si possono anche descrivere come:

$$(3.6.a) \quad \begin{cases} r_1(x) = \sum_{i=0}^{b-1} z_i \chi_{\Omega_i}(x) \\ r_{j+1}(x) = (r_j \circ T_{b_{\bar{m}}})(x), \quad \forall j \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Ove non diversamente dichiarato, ogni qual volta nel seguito si farà menzione delle funzioni di Rademacher, queste sono da intendersi sempre come generalizzate secondo le definizioni qui proposte.

3.7 Osservazione. Media nulla delle funzioni di Rademacher.

Le funzioni così definite godono, grazie alle relazioni (3.1.a) e all'ergodicità di $T_{b\bar{m}}(x)$ in Ω , delle seguenti proprietà di media nulla ($\forall c \in \mathbb{C}$ si indicherà con \bar{c} il suo coniugato):

$$(3.7.a) \quad \int_0^1 r_j^s(x) dx = 0 = \int_0^1 \overline{r_j^s(x)} dx, \quad \forall j \in \mathbb{N}^+, 1 \leq s \leq b-1$$

e inoltre sono ortonormali in L_Ω^2 .

3.8 Esempio grafico-numerico. Funzioni di Rademacher in base $\mathfrak{3}_{(0.35,0.1,0.55)}$.

Usando i valori già impiegati negli esempi precedenti per le componenti del vettore \bar{m} e indicando con i l'unità immaginaria, il sistema (3.1.a) ammette in \mathbb{C} la soluzione esplicita:

$$(3.8.a) \quad \begin{cases} z_0 = \sqrt{\frac{1-m_0}{2m_0}} \\ z_1 = -\sqrt{\frac{m_0}{2(1-m_0)}} + \sqrt{\frac{m_2}{2m_1(1-m_0)}} i \\ z_2 = -\sqrt{\frac{m_0}{2(1-m_0)}} - \sqrt{\frac{m_1}{2m_2(1-m_0)}} i. \end{cases}$$

Tutte le altre soluzioni possibili si ottengono coniugando e/o ruotando attorno all'origine la (3.8.a). Sostituendo nella (3.8.a) $m_0 = 0.35$, $m_1 = 0.1$ e $m_2 = 0.55$, si ottengono i seguenti valori con cui costruire le funzioni $r_1(x)$ e $[r_1(x)]^2$ in base $\mathfrak{3}_{(0.35,0.1,0.55)}$, delle quali a pagina 25 è esposto il grafico:

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt{\frac{13}{14}} \\ z_1 = -\sqrt{\frac{7}{26}} + \sqrt{\frac{55}{13}} i \\ z_2 = -\sqrt{\frac{7}{26}} - 2\sqrt{\frac{5}{143}} i, \end{cases}$$

che arrotondati a 10 cifre decimali sono pari a

$$\begin{cases} z_0 \approx 0.9636241117 \\ z_1 \approx -0.5188745217 + 2.0568833780 i \\ z_2 \approx -0.5188745217 - 0.3739787966 i. \end{cases}$$

Per una migliore visualizzazione spaziale, nei grafici sono riportate le porzioni di piano che contengono l'intervallo reale Ω e i tratti continui della funzione disegnata; questi ultimi sono evidenziati con una linea nera in grassetto, inoltre sul piano complesso (a sinistra) sono proiettati i tre punti che rappresentano l'immagine della funzione.

Per disegnare l'ultima figura, $r_1^2(x)$, si sono adoperati i valori:

$$\begin{cases} z_0^2 = \frac{13}{14} \\ z_1^2 = -\frac{103}{26} - \frac{\sqrt{770}}{13} i \\ z_2^2 = \frac{37}{286} + \frac{2}{13} \sqrt{\frac{70}{11}} i, \end{cases}$$

che approssimati sono

$$\begin{cases} z_0^2 = 0.9285714 \\ z_1^2 \approx -3.9615384 - 2.1345287578 i \\ z_2^2 \approx 0.1293706 + 0.3880961378 i. \end{cases}$$

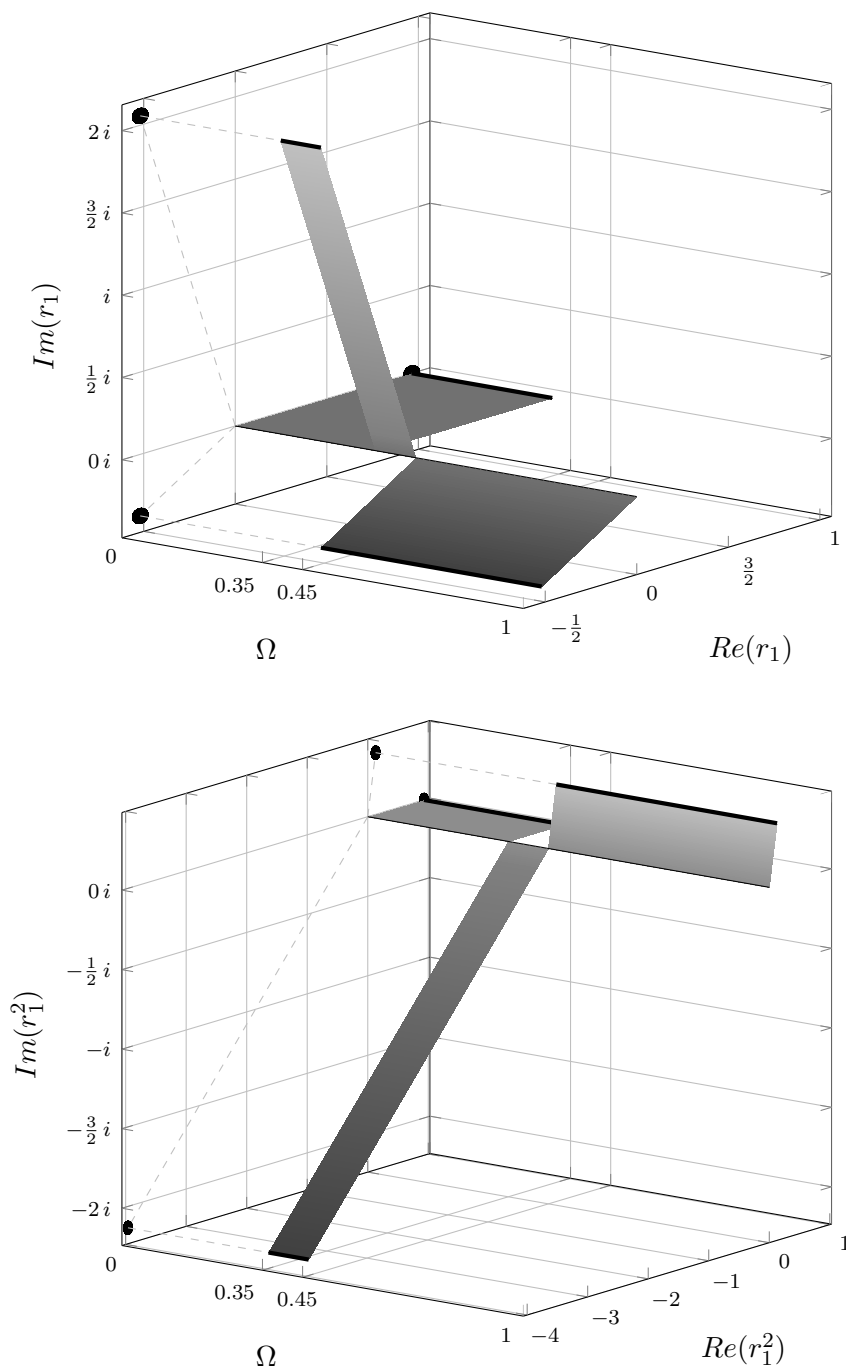


Figura 3.8.I: In alto $r_1(x)$ ovvero $w_1(x)$, in basso $r_1^2(x)$ ovvero $w_2(x)$, in base $\mathfrak{B}_{(0.35,0.1,0.55)}$.

Capitolo 4

Funzioni di Walsh

4.1 Definizione. Funzioni di Walsh generalizzate in base $b_{\vec{m}}$.

Similmente al caso delle basi uniformi (si veda Mendès France [11]), scelto un qualunque $j \in \mathbb{N}$, si considerino le cifre j_i dello sviluppo di j in base b :

$$j = \sum_{i=0}^s j_i b^i, \quad j_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}.$$

Si definiscono allora, $\forall x \in \Omega$, le funzioni di Walsh $b_{\vec{m}}$ -adiche $w_j(x)$ attraverso la formula:

$$(4.1.a) \quad w_j(x) = \prod_{k=0}^s r_{k+1}^{j_k}(x).$$

Le funzioni di Walsh così definite, come sarà più esplicitamente evidenziato nel seguito, non sono ortonormali in L^2_{Ω} come quelle relative alla base uniforme b , tuttavia godono di alcune fondamentali proprietà che saranno l'oggetto dei lemmi dimostrati nei prossimi paragrafi.

Ove non diversamente dichiarato, ogni qual volta nel seguito si farà menzione delle funzioni di Walsh, queste saranno da intendersi sempre come generalizzate secondo la definizione qui proposta.

Poiché nelle basi ternarie, seguendo la definizione (4.1.a), $w_1(x) = r_1(x)$ e $w_2(x) = [r_1(x)]^2$, si ha che i grafici nella figura 3.8.I a pagina 25 rappresentano anche i grafici delle prime due funzioni di Walsh (escludendo la banale $w_0(x)$) in base $\mathfrak{Z}_{(0.35,0.1,0.55)}$.

4.2 Lemma. *Le funzioni di Walsh hanno media nulla.*

Dimostrazione. Ricordando le notazioni del paragrafo precedente, si ha:

$$(4.2.a) \quad \int_0^1 w_j(x) dx = \int_0^1 \prod_{k=0}^s r_{k+1}^{j_k}(x) dx.$$

Negli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici di ordine s tutte le funzioni di Rademacher che compaiono nel prodotto (4.2.a), tranne l'ultima (che è quella di "frequenza" più alta), sono costanti.

Sia $l \in \mathbb{N}$, $0 \leq l \leq b^s - 1$ e sia $\beta_1\beta_2 \cdots \beta_s$ la stringa di cifre b -adiche della espressione di l in base b , ovvero

$$(4.2.b) \quad l = \sum_{j=1}^s \frac{\beta_j}{b^{j-s}};$$

si consideri inoltre l'intervallo:

$$(4.2.c) \quad I_l = \left[\left(\frac{l}{b^s} \right)_{b_{\bar{m}}}, \left(\frac{l+1}{b^s} \right)_{b_{\bar{m}}} \right) = \Omega_{\beta_1\beta_2 \cdots \beta_s}.$$

Per costruzione si ha che I_l è l' $(l+1)$ -esimo intervallo $b_{\bar{m}}$ -adico di ordine s (con questa enumerazione l'ordinamento lessicografico della stringa $\beta_1\beta_2 \cdots \beta_s$ rispecchia, al crescere di l , l'ordinamento naturale che gli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici di ordine s hanno sull'asse reale) e consiste dei punti di Ω la cui espansione $b_{\bar{m}}$ -adica inizia con la stringa $\beta_1\beta_2 \cdots \beta_s$.

Avendo così definito gli insiemi I_l , per ogni l compreso tra 0 e $b^s - 1$, e ritornando all'integrale (4.2.a), sia λ_l il prodotto (costante all'interno di ogni singolo intervallo $b_{\bar{m}}$ -adico di ordine s) delle prime s funzioni di Rademacher che compaiono sotto l'integrale il quale, per quanto detto, diventa:

$$= \sum_{l=0}^{b^s-1} \lambda_l \int_{I_l} r_{s+1}^{j_s}(x) dx;$$

cambiando le variabili in modo da proiettare i singoli intervalli I_l in Ω , ovvero ponendo $x = (b_l - a_l)u + a_l$ (dove con a_l e b_l si sono indicati rispettivamente l'estremo sinistro e l'estremo destro dell'intervallo I_l), si ottiene, poiché

$r_{s+1}(x)$ in ciascun intervallo I_l è per definizione omotetica a $r_1(x)$ estesa a tutto Ω :

$$= \sum_{l=0}^{b^s-1} \lambda_l(b_l - a_l) \int_0^1 r_1^{j_s}(u) du.$$

Per la (3.7.a) a pagina 23 ciascun addendo della somma sopra scritta è nullo, donde deriva la tesi cercata. \square

4.3 Proposizione. *Le funzioni di Walsh sono complete sugli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici di ordine q .*

Dimostrazione. Se si interpretano le prime b^q funzioni di Walsh come vettori che abbiano l'elemento i -esimo uguale al valore che la corrispondente funzione ha nell' i -esimo intervallo $b_{\bar{m}}$ -adico di ordine q , allora per verificare la completezza basta dimostrare che i primi b^q vettori di Walsh sono linearmente indipendenti. Ciò implica che, se $f(x)$ è una funzione semplice sugli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici di ordine q , considerando anche essa come un vettore riga \vec{f} di b^q elementi, esisterà una unica combinazione lineare delle prime b^q funzioni di Walsh che sia uguale a $f(x)$; definendo la matrice

$$W = \begin{pmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \cdots & w_{0,b^q-1} \\ w_{1,0} & w_{1,1} & \cdots & w_{1,b^q-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{b^q-1,0} & w_{b^q-1,1} & \cdots & w_{b^q-1,b^q-1} \end{pmatrix},$$

ottenuta mettendo in riga i primi b^q vettori di Walsh (il primo indice determina il vettore di Walsh, il secondo la componente di ciascun vettore, partendo da 0), tale combinazione lineare avrà per coefficienti le componenti del vettore riga $\vec{f}W^{-1}$.

Tutto si riconduce quindi a dimostrare la non singolarità della matrice W ; cominceremo col calcolarne l'elemento generico $w_{i,j}$, prestando attenzione agli indici che nella definizione delle funzioni di Walsh e degli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici partono da 0, mentre nella definizione delle funzioni di Rademacher e dei termini generici delle matrici partono da 1.

Si ha perciò che $w_{i,j}$ è il valore che la funzione $w_{i-1}(x)$ assume nel j -esimo intervallo $b_{\bar{m}}$ -adico di ordine q . Scrivendo $i - 1$ in base b , ovvero ponendo

$$i - 1 = \sum_{k=0}^{q-1} i_k b^k$$

e rammentando la definizione (4.1.a), ciò equivale a cercare il valore che assume nel j -esimo intervallo $b_{\bar{m}}$ -adico di ordine q la funzione:

$$(4.3.a) \quad \prod_{k=0}^{q-1} r_{k+1}^{i_k}(x).$$

D'altra parte ponendo anche

$$j - 1 = \sum_{k=0}^{q-1} j_k b^k,$$

giacché dalla definizione (3.5.a) a pagina 22 consegue che $\forall l \in \mathbb{N}$, $0 \leq l \leq b^{k-1} - 1$, la funzione $r_{k+1}(x)$ è costante in tutto l' $(l + 1)$ -esimo intervallo $b_{\bar{m}}$ -adico di ordine $k + 1$ e ivi vale $z_{(l \bmod b)}$, si ha che il prodotto (4.3.a) dà per risultato:

$$(4.3.b) \quad W = (w_{i,j}) = \left(\prod_{k=0}^{q-1} z_{j_k}^{i_k} \right).$$

Si ricorda che, avendo due matrici quadrate $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $B = (b_{k,l}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, il loro prodotto tensoriale $C = A \otimes B$ è una matrice, ancora quadrata, appartenente a $\mathbb{R}^{mn \times mn}$ che può essere scritta a blocchi come $(a_{i,j}B)$ e il cui termine generico è $(c_{(i-1)n+k,(j-1)n+l}) = (a_{i,j}b_{k,l})$; inoltre se A e B sono invertibili anche C lo sarà.

Si indichi adesso con

$$(4.3.c) \quad V_{\bar{z}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_{b-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_0^{b-1} & z_1^{b-1} & \cdots & z_{b-1}^{b-1} \end{pmatrix}$$

la matrice di Vandermonde costruita sul vettore \vec{z} (ovvero $(v_{i,j}) = (z_{j-1}^{i-1})$) e con

$$\tilde{V} = \underbrace{V_{\vec{z}} \otimes V_{\vec{z}} \otimes \cdots \otimes V_{\vec{z}}}_{q \text{ fattori}}$$

la matrice ottenuta moltiplicando tensorialmente $V_{\vec{z}}$ per se stessa q volte.

Espandendo $i - 1$ e $j - 1$, come si è già fatto poche righe or sono, nella loro espressione in base b , avremo

$$\tilde{V} = (\tilde{v}_{i,j}) = (\tilde{v}_{i_{q-1}b^{q-1}+i_{q-2}b^{q-2}+\dots+i_0+1, j_{q-1}b^{q-1}+j_{q-2}b^{q-2}+\dots+j_0+1}),$$

da cui, per la definizione di prodotto tensoriale sopra ricordata e per la (4.3.b), si giunge direttamente a

$$= \left(\prod_{k=0}^{q-1} v_{i_k+1, j_k+1} \right) = \left(\prod_{k=0}^{q-1} z_{j_k}^{i_k} \right) = W.$$

Essendo le componenti del vettore \vec{z} tutte distinte, in virtù dei Lemmi 3.3 a pagina 20 e 3.4 a pagina 21, si ha che $V_{\vec{z}}$ è invertibile e quindi lo sarà anche W , in quanto prodotto tensoriale di matrici invertibili. \square

Si è dunque dimostrato che le prime b^q funzioni di Walsh generalizzate sono complete nello spazio delle funzioni costanti a tratti sugli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici di ordine q e possono dunque essere adoperate come base per lo sviluppo in serie (finita) di Fourier-Walsh per le funzioni semplici definite su tali intervalli.

Giova a questo punto ricordare che, se $\vec{u} \in H$ è un vettore di uno spazio H di Hilbert di dimensione complessa n e $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$ sono vettori linearmente indipendenti di H , formanti quindi una base non necessariamente ortonormale, si può scrivere u come combinazione lineare degli elementi della base:

$$(4.3.d) \quad \vec{u} = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i \vec{v}_i.$$

I coefficienti σ_i sono chiamati coordinate controvarianti del vettore \vec{u} rispetto alla base prescelta. Se si calcolano i prodotti scalari hermitiani

$$\rho_j = \langle \vec{u}, \vec{v}_j \rangle, \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

si saranno definite invece le coordinate covarianti di \vec{u} . La relazione tra i due tipi di coordinate è data, moltiplicando scalarmente la (4.3.d) per \vec{v}_j , da:

$$\rho_j = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle.$$

Se si definiscono i vettori $\vec{\sigma} = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$, $\vec{\rho} = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1})$ e il tensore della metrica $G = (g_{i+1, j+1}) = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$, detto anche matrice di Gram relativa alla base $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$, l'ultima relazione si può scrivere in forma vettoriale come

$$(4.3.e) \quad \vec{\rho} = G\vec{\sigma}.$$

Risulta pertanto ovvio che, per basi vettoriali ortonormali (nelle quali G è la matrice identità), i due tipi di coordinate coincidono, ma ciò non accade per basi vettoriali non ortonormali, come nel caso delle funzioni di Walsh che formano una base vettoriale non ortogonale per lo spazio hilbertiano delle funzioni costanti a tratti sugli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici di ordine q .

4.4 Corollario. *Negli sviluppi in serie di Fourier-Walsh si ha che $\sigma_0 = \rho_0$.*

Dimostrazione. Essendoci posti in uno spazio di Hilbert si ha che lo sviluppo in serie (finita) di Fourier-Walsh di $f(x)$ (si ricorda che $f(x)$ è una funzione semplice sugli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici) sarà esprimibile anche attraverso i prodotti scalari hermitiani di $f(x)$ con le funzioni di Walsh interessate; in altre parole, se si indicano con ρ_j le coordinate covarianti,

$$(4.4.a) \quad \rho_j = \int_0^1 f(x) \overline{w_j(x)} dx, \quad 0 \leq j \leq b^q - 1,$$

allora sarà

$$(4.4.b) \quad f(x) = \sum_{j=0}^{b^q-1} \sigma_j w_j(x),$$

dove il vettore $\vec{\sigma}$ delle coordinate controvarianti è legato al vettore $\vec{\rho}$ delle coordinate covarianti dalla relazione inversa della (4.3.e): $\vec{\sigma} = G^{-1}\vec{\rho}$. La matrice di trasformazione di Gram G , per il lemma 4.2 e poiché $w_0(x) \equiv 1$, avrà la forma:

$$G = (g_{i,j}) = \int_0^1 w_i(x) \overline{w_j(x)} dx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

dove gli asterischi indicano un elemento generalmente non nullo. Tale forma è invariante per inversioni e dunque anche la matrice G^{-1} avrà lo stesso aspetto; da ciò si può osservare che sussiste la relazione cercata:

$$\sigma_0 = \rho_0. \quad \square$$

Si vuole inoltre osservare, unicamente come curiosità giacché il fatto non sarà utilizzato nel seguito, che le funzioni costanti a tratti sugli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici di ordine q sono dense in L^2_{Ω} per $q \rightarrow \infty$ e dunque l'insieme delle funzioni di Walsh $b_{\bar{m}}$ -adiche costituisce una base non ortogonale per L^2_{Ω} .

4.5 *Esempio grafico-numerico.* Non ortogonalità delle funzioni di Walsh in base $3_{(0.35,0.1,0.55)}$.

La non ortogonalità delle funzioni di Walsh generalizzate si può già riscontrare nell'esempio numerico introdotto nel paragrafo 2.3 a pagina 15; infatti, se si considera il prodotto scalare hermitiano tra $w_1(x)$ e $w_2(x)$ in una base ternaria non uniforme, avendo scelto per il sistema fondamentale la soluzione esplicita (3.8.a) a pagina 23 e indicando con i l'unità immaginaria, tale prodotto è uguale a:

$$\sqrt{\frac{(1-m_0)^3}{8m_0}} - \sqrt{\frac{m_0(1+m_0)^2}{8(1-m_0)}} + (m_2^2 - m_1^2) \sqrt{\frac{m_1 m_2}{8(1-m_0)^3}} i,$$

che è pari a zero se e solo se $m_0 = m_1 = m_2 = \frac{1}{3}$, cioè se e solo se la base ternaria è uniforme. Per curiosità si aggiunge che, nella base $3(0.35, 0.1, 0.55)$, tale prodotto hermitiano vale:

$$-\frac{1}{2\sqrt{182}} + \frac{9}{80}\sqrt{\frac{11}{65}}i \approx -0.037062465 + 0.046279876i.$$

È altresì rimarcabile come la generalizzazione proposta per le funzioni di Walsh, pur conducendo a una famiglia non ortogonale di funzioni, sia tuttavia efficace per la dimostrazione del teorema dei numeri normali: storicamente tale classe di funzioni era stata introdotta (si consulti, per esempio, Walsh [19], Agaev, Vilenkin, Dzhaferli e Rubinshtein [1], o l'esauriente testo di Schipp, Wade e Simon [17]) proprio per la comoda proprietà di ortogonalità (e addirittura ortonormalità) da esse possedute in base b .

Dunque si impone una revisione: non l'ortogonalità, ma unicamente la proprietà di media nulla è l'aspetto fondamentale delle funzioni di Walsh che permette di dimostrare il teorema di Borel, anche in basi non uniformi.

4.6 Lemma. *Le funzioni di Walsh in progressione geometrica di ragione b sono ortogonali.*

Dimostrazione. Si definiscano, $\forall j \in \mathbb{N}^+$, i sottoinsiemi delle funzioni di Walsh costituiti da:

$$(4.6.a) \quad \{w_{jb^i}(x)\}_{i \geq 0} = \{(w_j \circ T_{b^i}^i)(x)\}_{i \geq 0}.$$

Le due versioni della definizione sono equipollenti in virtù della (3.6.a) a pagina 22. Si noti, tra l'altro, che per $j = 1$ la definizione (4.6.a) individua le funzioni di Rademacher. Si consideri adesso il prodotto scalare hermitiano in L^2_{Ω} tra due funzioni appartenenti a uno stesso sottoinsieme definito dalla (4.6.a):

$$(4.6.b) \quad \langle w_j \circ T_{b^m}^{i_1}, w_j \circ T_{b^m}^{i_2} \rangle = \int_0^1 (w_j \circ T_{b^m}^{i_1})(x) \overline{(w_j \circ T_{b^m}^{i_2})(x)} dx.$$

L'integrale, quando $i_1 \neq i_2$, può essere sviluppato in maniera analoga a come è stato fatto nel lemma 4.2, sfruttando la media nulla della funzione di Rademacher (e delle sue potenze non superiori a $b - 1$) di frequenza più alta che compare nell'integrando, sia essa coniugata o meno, ottenendo il risultato cercato. \square

4.7 Lemma. *Le funzioni di Walsh in progressione geometrica di ragione b sono equilimitate.*

Dimostrazione. L'integrale (4.6.b), nel caso $i_1 = i_2 = i$, è banalmente uguale, per l'ergodicità di $T_{b_{\bar{m}}}(x)$ in Ω , alla norma al quadrato in L^2_{Ω} di $w_j(x)$. Inoltre, per il medesimo motivo, si ha $\forall j \in \mathbb{N}$ e $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$\|w_{jb^i}(x)\|_{L^2_{\Omega}} = \|w_j(x)\|_{L^2_{\Omega}}$$

e, maggiorando in virtù della (4.1.a) il modulo di $w_j(x)$,

$$\leq \sqrt{\int_0^1 \left[\left(\max_{0 \leq i \leq b-1} \{|z_i|, 1\} \right)^{(b-1)\lfloor \log_b(bj) \rfloor} \right]^2 dx};$$

maggiorando ancora con il valore esatto del logaritmo e scambiando tra di loro l'argomento di quest'ultimo con la base dell'esponenziale si ottiene infine:

$$\leq (bj)^{(b-1)\lfloor \log_b(\max_{0 \leq i \leq b-1} \{|z_i|, 1\}) \rfloor} = (bj)^{\nu},$$

con ν costante dipendente solo dal tipo di base $b_{\bar{m}}$ -adica. \square

4.8 Definizione. $R_n(x)$.

Si consideri il modulo della seguente somma parziale di funzioni di Walsh in progressione geometrica di ragione b :

$$(4.8.a) \quad R_n(x) = \left| \sum_{i=0}^{n-1} (w_j \circ T_{b_{\bar{m}}}^i)(x) \right|.$$

4.9 Lemma. $R_n(x)/n$ converge a 0 per quasi ogni $x \in \Omega$.

Dimostrazione. Si sfrutterà l'ortogonalità delle famiglie di funzioni di Walsh del tipo (4.6.a), tramite lo stesso metodo del secondo momento usato nell'articolo di Goodman [7] basato su un'idea di Weyl [20], per mostrare che $\forall j \in \mathbb{N}^+$ si ha:

$$(4.9.a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(x)}{n} = 0,$$

per quasi ogni $x \in \Omega$.

Infatti, per i Lemmi 4.6 e 4.7, si ha $\forall n \in \mathbb{N}^+$:

$$\int_0^1 [R_n(x)]^2 dx \leq n(bj)^{2\nu},$$

da cui segue che, se $n = k^2$,

$$(4.9.b) \quad \int_0^1 \left[\frac{R_{k^2}(x)}{k^2} \right]^2 dx \leq \frac{(bj)^{2\nu}}{k^2}.$$

Ponendo

$$\sigma_i(x) = \sum_{k=1}^i \left[\frac{R_{k^2}(x)}{k^2} \right]^2,$$

si ha che la successione $\sigma_i(x)$ è positiva e crescente, per cui esiste il limite $\sigma(x)$ per $i \rightarrow \infty$. Applicando il teorema di Beppo Levi, si ottiene:

$$\int_0^1 \sigma(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^i \left[\frac{R_{k^2}(x)}{k^2} \right]^2 dx;$$

scambiando l'integrale con la somma (finita) a secondo membro,

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^i \int_0^1 \left[\frac{R_{k^2}(x)}{k^2} \right]^2 dx$$

e, applicando la (4.9.b), si ha:

$$\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^i \frac{(bj)^{2\nu}}{k^2} = (bj)^{2\nu} \frac{\pi^2}{6}.$$

L'integrale di $\sigma(x)$ è dunque limitato e, essendo $\sigma(x)$ positiva, ciò implica che $\sigma(x)$ stessa è quasi ovunque limitata in Ω . Affinché questo sussista è necessario che il termine generico della serie che definisce $\sigma(x)$ vada a 0 per quasi ogni x di Ω ; in altre parole si è dimostrato che:

$$(4.9.c) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_{k^2}(x)}{k^2} = 0,$$

quasi ovunque in Ω .

Per ogni valore di n che non sia necessariamente un quadrato perfetto, esiste un unico intero positivo k_n tale che $k_n^2 \leq n < (k_n + 1)^2$. Chiaramente $k_n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Ricordando la definizione di $R_n(x)$, e le maggiorazioni adoperate nella dimostrazione del lemma 4.7, si ha che:

$$R_n(x) \leq R_{k_n^2}(x) + \sum_{i=k_n^2}^{n-1} |(w_j \circ T_{b_{\bar{m}}}^i)(x)| \leq R_{k_n^2} + 2k_n(bj)^\nu.$$

Dividendo per k_n^2 si ottiene, essendo $k_n^2 \leq n$,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(x)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(x)}{k_n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_{k_n^2}(x) + 2k_n(bj)^\nu}{k_n^2}$$

da cui, usando la (4.9.c), con k^2 rimpiazzato da k_n^2 , si ricava:

$$= 0 + 2(bj)^\nu \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} = 0,$$

quasi ovunque in Ω . Pertanto il lemma è provato. \square

Con questo ultimo lemma si è completata la collezione degli strumenti necessari per dare una dimostrazione, fondata sull'uso delle funzioni di Walsh come base vettoriale nello spazio delle funzioni semplici negli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici, del teorema dei numeri normali in basi di numerazione non uniformi.

Capitolo 5

Teorema dei numeri normali

5.1 *Osservazione.* Interpretazione dinamica del teorema dei numeri normali.

Per dimostrare il teorema dei numeri normali mostreremo, come nell'articolo di Goodman [7], che, per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni insieme I_l che sia un intervallo $b_{\bar{m}}$ -adico di un qualunque ordine q , si ha:

$$(5.1.a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\chi_{I_l} \circ T_{b_{\bar{m}}}^i \right) (x) = m(I_l).$$

Questo corrisponde a una interpretazione dinamica del teorema dei numeri normali rispecchiante l'osservazione (originariamente dovuta a Wall [18]) che un numero è normale in base b se e solo se le iterazioni attraverso la mappa b -adica $T_b(x)$ della sua parte frazionaria sono uniformemente distribuite in Ω .

Dimostrazione. Per provare ciò in base $b_{\bar{m}}$ sia $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ una stringa di cifre b -adiche; si considerino gli intervalli I_l ottenuti sostituendo s a q nelle definizioni (4.2.b) e (4.2.c) a pagina 28, da cui si ricava, di nuovo, che per costruzione I_l è l' $(l+1)$ -esimo intervallo $b_{\bar{m}}$ -adico di ordine q e consiste dei punti di Ω la cui espansione $b_{\bar{m}}$ -adica inizia con la stringa $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$. La formula (5.1.a) allora, per n finito, conta il numero medio di volte che l'orbita di x , generata dalla dinamica di spostamento $T_{b_{\bar{m}}}(x)$, casca nell'insieme I_l

nei primi n passi; quindi essa rappresenta il numero medio delle occorrenze della stringa di cifre $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ tra i primi $n + q - 1$ coefficienti $b_{\bar{m}}$ -adici di x , dove le sovrapposizioni sono considerate come occorrenze multiple. Il teorema dei numeri normali per le basi di numerazione non uniformi sarà una conseguenza dell'asserzione che la (5.1.a) vale quasi ovunque in Ω per ogni suddetto intervallo $b_{\bar{m}}$ -adico. \square

5.2 Teorema. *Quasi ogni numero reale è normale in ciascuna base $b_{\bar{m}}$ prefissata.*

Dimostrazione. Sia dunque $I_l \subset \Omega$ un intervallo $b_{\bar{m}}$ -adico di ordine q . La funzione indicatrice di I_l sarà allora una funzione semplice sugli intervalli $b_{\bar{m}}$ -adici di ordine q e si potrà, in virtù della proposizione 4.3 a pagina 29, sviluppare in serie finita di Fourier-Walsh ovvero, utilizzando la (4.4.b) a pagina 33,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\chi_{I_l} \circ T_{b_{\bar{m}}}^i)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(\sum_{j=0}^{b^q-1} \sigma_j w_j \right) \circ T_{b_{\bar{m}}}^i \right](x);$$

raccogliendo diversamente, la somma diviene:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{b^q-1} \sigma_j (w_j \circ T_{b_{\bar{m}}}^i)(x)$$

e, invertendo l'ordine di sommazione, si trasforma in

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{b^q-1} \sigma_j \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (w_j \circ T_{b_{\bar{m}}}^i)(x) \right],$$

ove compare, tra le parentesi quadre, la quantità che per il lemma 4.9 converge assolutamente a zero quasi ovunque in Ω e $\forall j \geq 1$. Per ciò, spezzando il limite della somma nella somma dei limiti (è lecito in virtù della convergenza dei singoli termini), e mandando n all'infinito, rimane solo il primo termine, quello cioè relativo a $j = 0$:

$$= \sum_{j=0}^{b^q-1} \sigma_j \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (w_j \circ T_{b_{\bar{m}}}^i)(x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_0 \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (w_0 \circ T_{b_{\bar{m}}}^i)(x);$$

adesso, ricordando che $w_0(x) \equiv 1$, con semplici calcoli si ottiene:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_0 \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_0 \frac{1}{n} n = \sigma_0,$$

al quale si può applicare il corollario 4.4 a pagina 32 e in particolare la relazione (4.4.a), ottenendo infine:

$$= \rho_0 = \int_0^1 \chi_{I_l}(x) \overline{w_0(x)} dx = \int_0^1 \chi_{I_l}(x) dx = m(I_l),$$

che dimostra la normalità di quasi ogni $x \in \Omega$ rispetto a una qualsiasi base non uniforme prefissata $b_{\vec{m}}$.

Tale risultato si può banalmente estendere a tutta la retta reale notando che, con x , è normale ogni numero reale la cui parte frazionaria sia x . \square

5.3 Osservazione. Normalità rispetto a tutte le basi $b_{\vec{m}}$.

Ovviamente il teorema 5.2 non si può estendere, come nel caso delle basi uniformi, affermando che quasi ogni numero reale è contemporaneamente normale in tutte le basi $b_{\vec{m}}$ (che sono \aleph_1). Infatti, come controesempio immediato, $\forall \varphi \in (0, 1)$ si può costruire la base binaria generata dalla divisione $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \varphi, \alpha_2 = 1$ nella quale il numero φ non è normale, essendo razionale per costruzione:

$$\varphi = (0, 1)_{2_{(\varphi, 1-\varphi)}}.$$

Tuttavia, ragionando come per il teorema di Borel originario, si può affermare qualcosa di più, come illustrato nel seguente paragrafo.

5.4 Corollario (teorema dei numeri normali). *Quasi ogni numero reale è normale negli insiemi numerabili prefissati di basi non uniformi.*

Dimostrazione. Sia

$$\mathcal{B} = \{b_{\vec{m}_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$$

un insieme numerabile di basi non uniformi e sia, $\forall i \in \mathbb{N}$, \mathcal{A}_i l'insieme dei numeri reali non normali nella i -esima base non uniforme di \mathcal{B} . Ne deriva che l'insieme

$$\mathcal{N} = \mathbb{R} - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i = \mathbb{R} - \mathcal{A}$$

è composto di numeri che sono normali contemporaneamente in tutte le basi appartenenti a \mathcal{B} . D'altra parte gli \mathcal{A}_i , per il teorema 5.2, hanno tutti misura nulla, e dunque pure la misura di \mathcal{A} sarà nulla, dato che è unione numerabile di insiemi a misura nulla. Il che, letto in altri termini, significa che quasi ogni numero reale è normale in ogni prefissato insieme numerabile di basi non uniformi $b_{\vec{m}}$ (come può essere quello delle basi generate da divisioni composte di soli numeri algebrico-differenziali, con b appartenente a un insieme finito di valori).

Questo risultato, che indicheremo come teorema dei numeri normali per le basi di numerazione non uniformi, è quanto si voleva dimostrare. \square

Capitolo 6

Indipendenza statistica e moltiplicatività

6.1 Osservazione. Moltiplicatività delle $r_j(x)$.

Dimostrazione. Affermare che le funzioni di Rademacher generalizzate godono della proprietà di moltiplicatività, originariamente introdotta da Steinhaus [9], ovvero formano un sistema di funzioni moltiplicativo ortogonale, equivale a verificare che sussiste la relazione

$$(6.1.a) \quad \int_0^1 \prod_{j=1}^k r_j^{d_j}(x) dx = \prod_{j=1}^k \int_0^1 r_j^{d_j}(x) dx, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

dove $d_j \in \mathbb{N}$, $0 \leq d_j \leq b - 1$. La (3.7.a) a pagina 23 e i risultati del paragrafo 4.2 a pagina 28 attestano che la (6.1.a) sussiste; inoltre gli integrali scritti valgono sempre 0, tranne nell'eventualità che tutti gli esponenti d_j siano nulli, nel qual caso il valore degli integrali è ovviamente 1. \square

Si vuol sottolineare il fatto che la dimostrazione della (6.1.a) non ha richiesto la nozione di indipendenza statistica delle funzioni di Rademacher, ma solamente un semplice calcolo di analisi elementare. In effetti si può giungere alla moltiplicatività sfruttando l'indipendenza, facendo uso di una idea dimostrativa relativa a una formula analoga già presente nella monografia di Kac [8].

6.2 *Osservazione.* L'indipendenza statistica delle $r_j(x)$ ne implica la proprietà di moltiplicatività.

Dimostrazione. Si supponga che le funzioni di Rademacher siano statisticamente indipendenti e sia P una misura di probabilità su Ω , nel nostro caso la misura uniforme di Lebesgue. Per la definizione 3.5 a pagina 22 si ha allora che

$$\int_0^1 \prod_{j=1}^k r_j^{d_j}(x) dx = \sum_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k=0}^{b-1} \left(\prod_{j=1}^k z_{\beta_j}^{d_j} P_{\{r_1(x)=z_{\beta_1}, r_2(x)=z_{\beta_2}, \dots, r_k(x)=z_{\beta_k}\}} \right),$$

dove i β_j variano indipendentemente nell'insieme $\{0, 1, \dots, b-1\}$. Applicando l'indipendenza statistica delle $r_j(x)$ l'ultima espressione diventa

$$= \sum_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k=0}^{b-1} \left(\prod_{j=1}^k z_{\beta_j}^{d_j} \prod_{j=1}^k P_{\{r_j(x)=z_{\beta_j}\}} \right) = \sum_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k=0}^{b-1} \left(\prod_{j=1}^k z_{\beta_j}^{d_j} P_{\{r_j(x)=z_{\beta_j}\}} \right)$$

e questa, scambiando la somma e il prodotto tra di loro, si può scrivere come

$$= \prod_{j=1}^k \sum_{\beta_j=0}^{b-1} z_{\beta_j}^{d_j} P_{\{r_j(x)=z_{\beta_j}\}},$$

dalla quale, operando in maniera inversa di come si è fatto all'inizio del paragrafo, si può riassemblare la somma in un integrale,

$$= \prod_{j=1}^k \int_0^1 r_j^{d_j}(x) dx,$$

ottenendo la tesi cercata. □

6.3 Definizione. Identità di Rényi.

In Rényi [15, pag. 130] viene esposta la formula (valida per le funzioni di Rademacher in base 2):

$$\frac{1 + \gamma_j r_j(x)}{2} = \chi_{\{r_j(x)=\gamma_j\}}(x),$$

$\forall j \in \mathbb{N}^+$, $\forall x \in \Omega$ e con $\gamma_j \in \{-1, 1\}$, ovvero γ_j appartiene all'immagine delle funzioni di Rademacher in base 2.

Tale identità viene utilizzata da Rényi per giustificare, senza ricorrere alla completezza, l'introduzione delle funzioni di Walsh per sviluppare in serie finita di Fourier-Walsh le funzioni caratteristiche degli intervalli 2-adici. Nell'articolo di Goodman [7] è proposta una generalizzazione valida in base b di tale identità e l'idea di Rényi viene ulteriormente sfruttata per esaminare più attentamente la connessione tra la moltiplicatività delle funzioni b -adiche di Rademacher e l'indipendenza statistica dei coefficienti b -adici.

La conclusione che viene tratta è che, per le basi di numerazione uniformi, le due nozioni sono interamente equivalenti e questo, per l'osservazione 6.1 che evidentemente vale anche in basi di numerazioni uniformi, dà una nuova dimostrazione dell'indipendenza dei coefficienti b -adici.

Dell'identità di Rényi si fornirà qui una generalizzazione per le basi non uniformi $b_{\bar{m}}$ qualunque e, tramite tale generalizzazione, si dimostrerà l'equivalenza tra moltiplicatività delle funzioni di Rademacher $b_{\bar{m}}$ -adiche e indipendenza statistica dei coefficienti $b_{\bar{m}}$ -adici.

6.4 Proposizione. *L'identità di Rényi si può estendere a qualunque base non uniforme $b_{\bar{m}}$.*

Dimostrazione. Riprendendo la definizione (3.1.a) a pagina 19 si ponga, $\forall j \in \mathbb{N}^+$, $\gamma_j \in \{z_0, z_1, \dots, z_{b-1}\}$. Si vuol trovare una formula del tipo:

$$(6.4.a) \quad \chi_{\{r_j(x)=\gamma_j\}} = \sum_{i,k=0}^{b-1} \frac{\lambda_{i,k}}{\gamma_j^k} r_j^i(x).$$

Per ottenere questo è sufficiente, dato che la (6.4.a) può valere solamente 0 o 1 dipendentemente dalla posizione di x in Ω , trovare una soluzione al sistema lineare di b^2 equazioni in b^2 incognite (le $\lambda_{i,k}$):

$$(6.4.b) \quad \left\{ \sum_{i=0}^{b-1} \sum_{k=0}^{b-1} \xi^i \eta^{-k} \lambda_{i,k} = \delta_{\xi,\eta}, \quad (\xi, \eta) \in \{z_0, z_1, \dots, z_{b-1}\}^2, \right.$$

ove si è utilizzato il simbolo δ di Kronecker: $\delta_{\xi,\eta} = 0$ se $\xi \neq \eta$, $\delta_{\xi,\eta} = 1$ se $\xi = \eta$.

L'esistenza (e unicità) delle soluzioni $\lambda_{i,k}$ è dunque assicurata se e solo se la matrice C dei coefficienti del sistema lineare (6.4.b) è invertibile; scrivendo ordinatamente tutte le equazioni del sistema, facendo cioè variare, rispecchiando l'ordine delle sommatorie, prima η e poi ξ da z_0 a z_{b-1} , si ha che l'elemento generico di C è esprimibile con la formula:

$$(c_{r,s}) = (c_{jb+l+1,ib+k+1}) = (z_j^i z_l^{-k}).$$

Sfruttando la definizione (4.3.c) a pagina 30 si dimostra, semplicemente sviluppando il prodotto tensoriale termine per termine come si è fatto nel paragrafo 4.3 a pagina 29 e verificando che gli elementi generici delle due matrici sono identici, che

$$C = V_{\bar{z}} \otimes V_{(z_0^{-1}, z_1^{-1}, \dots, z_{b-1}^{-1})}.$$

Per i Lemmi 3.3 e 3.4 alle pagine 20–21, le due matrici di Vandermonde che compaiono in quest'ultimo prodotto tensoriale sono invertibili, e dunque anche C lo è. Sarà dunque sempre possibile, relativamente a ogni base $b_{\bar{m}}$, risolvere univocamente il sistema (6.4.b) e usare le soluzioni $\lambda_{i,k}$ trovate per costruire l'identità di Rényi generalizzata (6.4.a). \square

6.5 Lemma. *La proprietà di moltiplicatività delle $r_j(x)$ ne implica l'indipendenza statistica.*

Dimostrazione. Per $j \in \mathbb{N}^+$, $1 \leq j \leq q$, sia $\gamma_j \in \{z_0, z_1, \dots, z_{b-1}\}$. Dalla definizione 3.5 a pagina 22 segue allora:

$$P_{\{r_1(x)=\gamma_1, r_2(x)=\gamma_2, \dots, r_q(x)=\gamma_q\}} = \int_0^1 \mathcal{X}_{\{r_1(x)=\gamma_1, r_2(x)=\gamma_2, \dots, r_q(x)=\gamma_q\}}(x) dx;$$

la funzione indicatrice può essere spezzata in

$$= \int_0^1 \prod_{j=1}^q \mathcal{X}_{\{r_j(x)=\gamma_j\}}(x) dx$$

e, sostituendo nel prodotto la (6.4.a), si ottiene:

$$= \int_0^1 \prod_{j=1}^q \sum_{i,k=0}^{b-1} \frac{\lambda_{i,k}}{\gamma_j^k} r_j^i(x) dx;$$

per la (6.1.a), integrando, tutti gli addendi nei quali compaiono funzioni di Rademacher, o loro potenze, si annullano, dunque rimangono solo i termini con $i = 0$ che, essendo costanti, danno:

$$= \prod_{j=1}^q \sum_{k=0}^{b-1} \frac{\lambda_{0,k}}{\gamma_j^k}$$

e, sfruttando di nuovo la costanza di tutti i termini, l'ultima espressione si può scrivere come

$$= \prod_{j=1}^q \int_0^1 \sum_{k=0}^{b-1} \frac{\lambda_{0,k}}{\gamma_j^k} dx;$$

per la (3.7.a) a pagina 23 si possono aggiungere sotto il segno di integrale multipli di funzioni di Rademacher o loro potenze; in particolare è lecito il seguente passaggio:

$$= \prod_{j=1}^q \int_0^1 \sum_{i,k=0}^{b-1} \frac{\lambda_{i,k}}{\gamma_j^k} r_j^i(x) dx,$$

da cui, se si riapplica la (6.4.a), si ha infine

$$= \prod_{j=1}^q \int_0^1 \chi_{\{r_j(x)=\gamma_j\}}(x) dx = \prod_{j=1}^q P_{\{r_j(x)=\gamma_j\}},$$

che rappresenta l'indipendenza statistica delle funzioni di Rademacher generalizzate. \square

Come curiosità si può aggiungere che, in concordanza con quanto accade nelle basi di numerazione uniformi, per le definizioni dei capitoli 2 e 3, il prodotto dell'espressione scritta sopra vale:

$$\prod_{j=1}^q m_{\beta_j}, \quad \beta_j = i \text{ se } \gamma_j = z_i.$$

Per concludere notiamo che, come nel caso delle basi uniformi, si potrebbe adattare la precedente dimostrazione per provare l'indipendenza statistica della famiglia di funzioni (4.6.a) a pagina 34, di cui le funzioni di Rademacher sono un caso particolare, con l'unica differenza che la famiglia (4.6.a) forma un sistema moltiplicativo ortogonale solo se gli esponenti d_j definiti

nel paragrafo 6.1 variano nell'insieme $\{0, 1\}$. Difatti in base $b_{\bar{m}}$ le funzioni di Walsh hanno media nulla, come quelle di Rademacher, ma ciò non vale per le loro potenze. Di ciò si può produrre anche una verifica diretta, calcolando il valore medio del quadrato della funzione $w_2(x)$ relativa a una base, per esempio, ternaria non uniforme:

$$\int_0^1 w_2^2(x) dx = \int_0^1 r_1^4(x) dx = \sum_{i=0}^2 m_i z_i^4.$$

Già qui si constata che in generale questo valore non sarà nullo: gli z_i devono soddisfare il sistema fondamentale (3.1.a) a pagina 19, per cui non rimangono sufficienti “gradi di libertà” per soddisfare l’ulteriore richiesta che l’ultima espressione scritta valga 0 per ogni arbitraria scelta della base ternaria non uniforme (in fondo è per questo stesso motivo che l’insieme completo delle funzioni di Walsh generalizzate non è né moltiplicativo né ortogonale). In effetti, adoperando i valori della soluzione esplicita (3.8.a) a pagina 23, calcolata in base $3_{(0.35,0.1,0.55)}$ come negli esempi precedenti, il valore medio di $w_2^2(x)$ è pari (usando nuovamente i per indicare l’unità immaginaria) a:

$$\frac{5373}{4004} + \frac{9}{13} \sqrt{\frac{70}{11}} i \approx 1.3419080919 + 1.7464326200 i.$$

6.6 Teorema. *La moltiplicatività delle $r_j(x)$ equivale all’indipendenza statistica delle $b_j(x)$.*

Ovvero sussiste la situazione illustrata nel diagramma in figura 6.6.I.

Dimostrazione. La definizione 3.5 a pagina 22 implica che $\forall j \in \mathbb{N}^+$ le funzioni di Rademacher e i coefficienti $b_{\bar{m}}$ -adici differiscono unicamente per l’immagine: infatti $r_j(\Omega) = \{z_0, z_1, \dots, z_{b-1}\}$ mentre $b_j(\Omega) = \{0, 1, \dots, b-1\}$; inoltre $\forall x \in \Omega$ e $\forall i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ se $r_j(x) = z_i$ allora $b_j(x) = i$ e viceversa. Quindi l’indipendenza statistica delle funzioni di Rademacher implica l’indipendenza statistica dei coefficienti $b_{\bar{m}}$ -adici e viceversa; infatti, per quanto detto sopra, valgono le due eguaglianze:

$$P_{\{b_1(x)=\beta_1, b_2(x)=\beta_2, \dots, b_q(x)=\beta_q\}} = P_{\{r_1(x)=\gamma_1, r_2(x)=\gamma_2, \dots, r_q(x)=\gamma_q\}},$$

$$\prod_{j=1}^q P_{\{r_j(x)=\gamma_j\}} = \prod_{j=1}^q P_{\{b_j(x)=\beta_j\}},$$

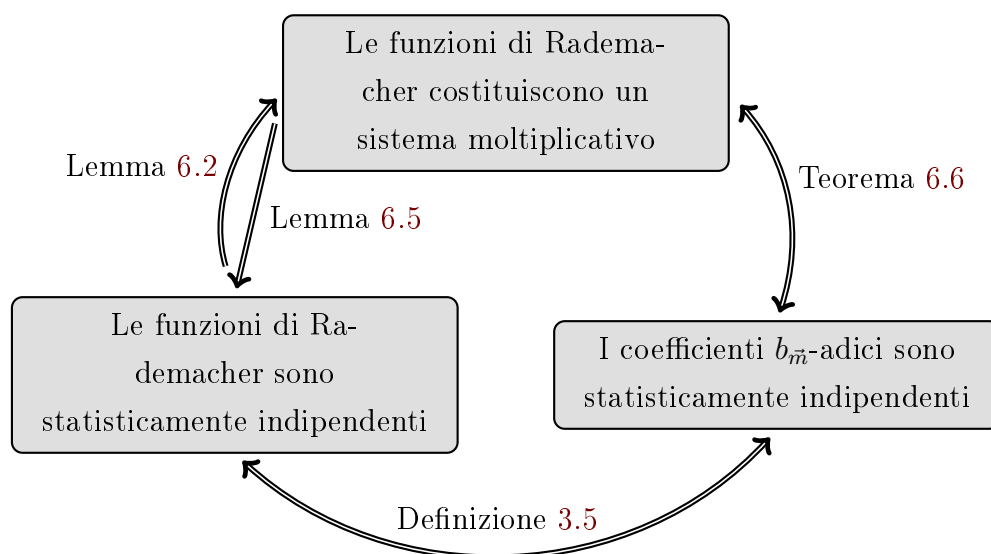


Figura 6.6.I: Proprietà delle funzioni $r_j(x)$ e $b_j(x)$.

dove $\forall j \in \{1, 2, \dots, q\}$ si è posto $\beta_j = i$ se $\gamma_j = z_i$. Dunque, per il lemma 6.5, si ha

$$P_{\{b_1(x)=\beta_1, b_2(x)=\beta_2, \dots, b_q(x)=\beta_q\}} = \prod_{j=1}^q P_{\{b_j(x)=\beta_j\}},$$

avendo supposto la moltiplicatività delle funzioni di Rademacher.

Viceversa, ragionando alla stessa maniera, si potrà fare uso del lemma 6.2 per ritrovare la moltiplicatività delle funzioni di Rademacher supponendo l'indipendenza statistica dei coefficienti b_m -adici. \square

Bibliografia

- [1] G. N. Agaev, N. Ya. Vilenkin, G. M. Dzhafarli, and A. I. Rubinshtein. *Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups*. ÉLM, Baku, 1981.
- [2] É. Bézout. *Théorie générale des équations algébriques*. Impr. de P.-D. Pierres, Paris, 1779.
- [3] É. Borel. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, 27(1):247–271, 1909.
- [4] M. Corsolini. Dello Scommettere su Monete Truccate. Manoscritto, 1996.
- [5] N. Dunford and D. S. Miller. On the Ergodic Theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 60(3):538–549, 1946.
- [6] C. J. Everett. Representations for Real Numbers. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 52(10):861–869, 1946.
- [7] G. S. Goodman. *Statistical Independence, Normal Numbers, and Multiplicative Orthonormal Systems*. Dipartimento di Statistica, Università di Firenze, 1994.
- [8] M. Kac. *Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory*, volume 12 of *The Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, 1959.

-
- [9] S. Kaczmarz and H. Steinhaus. *Theorie der Orthogonalreihen*, volume 6 of *Monografie Matematyczne*. Z Subwencji funduszu kultury narodowej, Warszawa-Lwów, 1935.
- [10] K. Knopp. Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten. *Mathematische Annalen*, 95(1):409–426, 1926.
- [11] M. Mendès France. Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires. *Journal d'Analyse Mathématique*, 20(1):1–56, 1967.
- [12] J. Morawiec. On a linear functional equation. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics*, 43(2):131–142, 1995.
- [13] S. S. Pillai. On normal numbers. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences — Section A*, 12(2):179–184, 1940.
- [14] A. Rényi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 8(3):477–493, 1957.
- [15] A. Rényi. *Foundations of Probability*. Holden-Day, 1970.
- [16] F. Riesz. On a recent generalization of G. D. Birkhoff's ergodic theorem. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 11:193–200, 1948.
- [17] F. Schipp, W. R. Wade, and P. Simon. *Walsh series: an introduction to the dyadic harmonic analysis*. Adam Hilger, 1990.
- [18] D. D. Wall. *Normal numbers*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1949.
- [19] J. L. Walsh. A Closed Set of Normal Orthogonal Functions. *American Journal of Mathematics*, 45(1):5–24, 1923.
- [20] H. Weyl. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. *Mathematische Annalen*, 77(3):313–352, 1916.